对 2021 年 CGMO 第二题的推广及证明

张峻铭[1]　程昱皓[2]

[1] 南开大学 数学科学学院

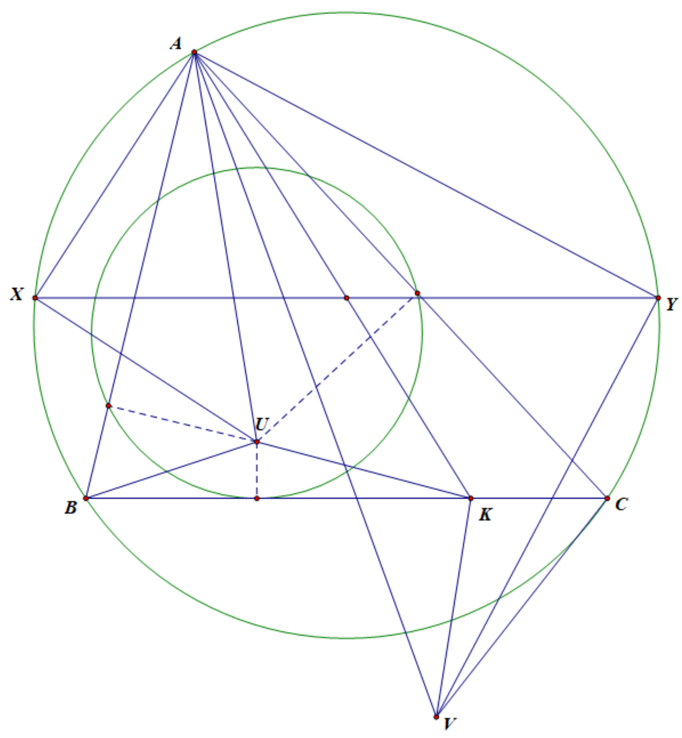
[2] 清华大学 求真书院

2021 年 CGMO 第二题的题干如下：

题目 1. 给定 $\triangle ABC$ 及其内心 I、A-旁心 J，X、Y 为 $\odot(ABC)$ 上两点，满足 $\angle AXI = \angle AYJ = 90°$，$K$ 是 BC 上一点，满足 $KI = KJ$. 求证：AK 平分线段 XY.

本文中我们将证明如下推广形式：

题目 2. 给定 $\triangle ABC$，平面上 U、V 两点满足 $\triangle ABU \overset{+}{\sim} \triangle AVC$，$\odot(ABC)$ 上两点 X、Y 满足 $\angle AXU = \angle AYV = 90°$. K 是 BC 上一点，满足 $KU = KV$. 证明：若 U 关于 $\triangle ABC$ 的垂足圆与 BC 相切，则 AK 平分线段 XY.



显然当 U 为 $\triangle ABC$ 的内心时，**题目 2** 退化为**题目 1**.

下面的讨论均在**题目 2** 的记号下进行，并设 AX、AY 分别交 BC 于 Y'、X'，记以 A 为中心，$AB \cdot AC$ 为幂，$\angle BAC$ 角平分线为轴的反演反射变换为 φ，在此变换下，B 与 C 互变、U 与 V 互变，$\varphi(\odot(ABC)) = BC$. 一个简单的观察可以告诉我们如下引理：

引理 1. $XY//BC \iff \angle AUY' = 90^\circ$.

证明. $\angle AUY' = 90^\circ \iff \varphi(Y) = Y' \iff \angle XAB = \angle CAY \iff XY//BC$. $\square$

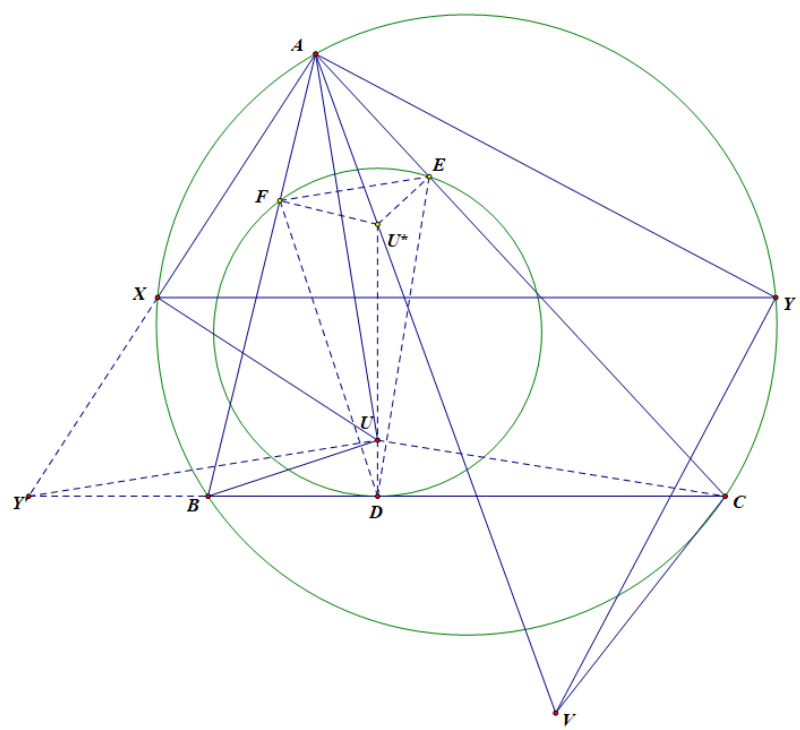
接下来我们分两部分来进行证明**题目 2**，第一部分是要证明下面这个结果：

引理 2. *若 U 关于 $\triangle ABC$ 的垂足圆与 BC 相切，则 $XY//BC$.*

证明. 设 U 关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点为 U^*，U^* 关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 $\triangle DEF$，则此时 U、U^*、D 共线，由于 $BU \perp DF$，$\angle UBC = \angle FDU = 90^\circ - \angle FED$，又 $AU \perp EF$、$CU \perp DE$，$\angle UBC = \angle AUC - 90^\circ$. 考虑 $\odot(UBC)$ 在 U 处的切线，设其交 BC 于 T，则 $\angle AUT = 180^\circ - \angle AUC + \angle UBC = 90^\circ$，设 AT 与 $\odot(ABC)$ 的第二交点为 P，则

$$TP \cdot TA = TB \cdot TC = TU^2,$$

故 $\angle APU = \angle AUT = 90^\circ$，于是 $P \equiv X$ 且 $T \equiv Y'$. 由**引理 1** 即知 $XY//BC$. $\square$



第二部分则是由 $XY//BC$ 去推出 AK 平分 XY.

引理 3. *若 $XY//BC$，则 AK 平分线段 XY.*

证明. $XY//BC$ 说明 $\triangle AUY' \stackrel{-}{\sim} \triangle AVX'$. 下面采用复数法，以点本身的标签表示其对应的复数. 设

$$\frac{Y'-U}{A-U} = k\mathbf{i},$$

则 $\dfrac{X'-V}{A-V} = -k\mathbf{i}$，于是设 $X'Y'$、UV 中点分别为 K'、W，有 $\dfrac{K'-W}{U-V} = -\dfrac{k}{2}\mathbf{i}$，故 $K'W \perp UV$，即 $K \equiv K'$. 于是 AK 平分 $Y'X'$，亦平分 XY. $\square$

由**引理 2** 和**引理 3** 就证明了**题目 2**.

注 1. 当然我们可以对满足“U 关于 $\triangle ABC$ 的垂足圆与 BC 相切”的点 U 的轨迹进行更进一步的讨论，由于 U 与其等角共轭点连线垂直于 BC，这个轨迹固然是 BC 垂直方向上无穷远点为枢点的主等角共轭三次曲线. 但另一方面，如果回顾**引理 1** 的证明，我们可以将满足 $XY//BC$ 的点 U 的构造方式抽象如下：给定平面上两点 A、A'(此处取为 A 关于 $\odot(ABC)$ 的对径点) 及一直线 $l := BC$，X 为以 AA' 为直径的圆上一动点，AX 交 l 于 Y'，则以 AY' 为直径的圆与 $A'X$ 的交点恰为 U. 如果读者熟悉 *QL-Cu1*(国内所谓”巨龙曲线”的性质)，可以发现 U 的轨迹恰好为以 A 为 *Miquel* 点、以 BC 中垂线为 *Newton* 线的 *QL-Cu1*. 由于 $\triangle ABC$ 的三顶点、内心、三旁心、A 在 BC 上的投影、A' 以及两圆环点均在上述两条三次曲线上，故由至多十点确定一条三次曲线，这两条三次曲线必然是同一条，如此同样也可完成对**引理 1** 的证明，其中细节就不在本文中讨论了，[1] 或许是一个好的补充。

参考文献

[1] 张峻铭, 巨龙曲线上的加法群,`https://mp.weixin.qq.com/s/S6uCQioGVoqyjO_Q13hIKw`